Klasse B12T2
2. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 21.02.2013

Analysis

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_k: x \mapsto \frac{x^2 + kx}{x-1}$; $k \in \mathbb{R}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1 Untersuchen Sie, für welchen Wert von k die Funktion f_k stetig fortsetzbar ist.
Geben Sie den Funktionsterm $f_k(x)$ für diesen Fall in möglichst einfacher Form an und zeichnen Sie den Graphen für $-5 \le x \le 7$ in das vorhanden Koordinatensystem ein. [4]

1.2 Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen in Abhängigkeit von k. [4]

1.3 Bestimmen Sie für $k \neq -1$ die Gleichungen sämtlicher Asymptoten. [5]

1.5.0 Ab nun sei **k = 0** mit $f_0(x) := f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.5.1 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten, sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. [5]

1.5.2 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die Graphen der Asymptoten sowie den Graphen G_f für $-5 \le x \le 7$ in das vorhandene Koordinatensystem. [5]

1.6.0 Gegeben ist ferner die reelle Funktion g mit $g(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$

1.6.1 Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen der Funktion $j: x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht. [4]

1.6.2 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $p: x \mapsto \frac{1}{g(x)}$. [5]

1.7.0 Die Funktion h ist festgelegt durch:
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 2 \\ g(x) & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$
Sie ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$. Der Nachweis dafür ist nicht erforderlich.

1.7.1 Untersuchen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist. [4]

Analytische Geometrie

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P_t(2-3t\,;\,12\,;\,11-4t)$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben.
Sie legen die Gerade g fest.
Die Punkte P_t legen zusammen mit dem Koordinatenursprung O und dem Punkt A(3; 0; 4) die Dreiecke OAP_t fest.

2.1 Zeigen Sie, dass für die Maßzahl J(t) des Flächeninhalts des Dreiecks OAP_t gilt: J(t) =32,5. [4]

2.2 Was folgt aus dem Ergebnis von Aufgabe 2.1 bezüglich der Lage der Punkte P_t ?
Fertigen Sie eine Skizze, aus der die Lage der Geraden g und der Punkte O und A hervorgeht.
Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von 2.1 den Abstand d der Geraden g vom Punkt A.
(Ergebnis: d = 13) [4]

2.3 Berechnen Sie ohne Verwendung des Skalarproduktes den Wert von t, für den das Dreieck OAP_t einen rechten Winkel beim Punkt A hat. [4]

2.4.0 Sie Punkte $S_k(0; 6; k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ bilden die Spitze eines Tetraeders OAP_0S_k.

2.4.1 Berechnen Sie die von k abhängige Maßzahl V(k) des Volumens des Tetraeders OAP_0S_k.
(Ergebnis: $V(k) = |\,25 - 6k\,|$) [3]

2.4.2 Ermitteln Sie, für welche Werte von k und t die Vektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OP_t} = \vec{p}_t$ und $\overrightarrow{OS_k} = \vec{s}_k$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
Welche Folgerung ergibt sich daraus für die Lage der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{p}_t$ und $\vec{s}_k$? [3]